الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية **الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات**

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي **دورة: 2016**

الشعبة :رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات **المدة: 04 سا و 30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأوّل

يحتوي الموضوع الأول على 03 صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5).

التمرين الأوّل: (04,5 نقطة)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(2;-1;1)$ ، $C(-1;0;1)$ ، $D\left(\frac{1}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$ ، $E(0;1;1)$ ، $H\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{2}\right)$

و المستوي (P) المعرّف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1+\alpha+\beta \\ y=2-\alpha \\ z=-1+2\alpha-\beta \end{cases}$ ، α و β وسيطان حقيقيان.

1) أ) بيّن أنّ النقط A ، B و C تُعيّن مستويا.

ب) تحقّق أنّ الشعاع $\vec{n}(1;3;5)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

2) أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ثم بيّن أن المستويين (ABC) و (P) متقاطعان.

ب) نسمي (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (ABC) و (P).

– تحقّق أنّ النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) و أنّ $\vec{u}(-3;1;0)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

جـ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

د) بيّن أنّ النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) ثم استنتج المسافة بين A و (Δ).

3) G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A,2);(B,-3);(C,2)\}$.

نسمي (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تُحقّق: $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{GM}=11$.

أ) عيّن إحداثيات النقطة G.

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ) ثم بيّن أنّها سطح كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

جـ) حدّد الوضعية النسبية للمستوي (ABC) و المجموعة (Γ).

التمرين الثاني: (04,5 نقطة)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدّها الأوّل u_0 و أساسها q حيث: $\begin{cases} \ln(u_1)+\ln(u_2)=11 \\ u_1+u_2=e^4\left(1+e^3\right) \end{cases}$

1) احسب u_1 و u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q .

2) نضع: $u_1=e^4$ و $q=e^3$.

أ) عبّر عن u_n بدلالة n.

ب) نضع : $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+\ln(u_2)+...+\ln(u_n)$. احسب S_n بدلالة n.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a_n=n+3$.

أ) بيّن أنّ : $PGCD(2S_n,a_n)=PGCD(a_n,14)$.

ب) عيّن القيم الممكنة لـ: $PGCD(2S_n,a_n)$.

جـ) عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها : $PGCD(2S_n,a_n)=7$.

4) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.

5) نضع: $b_n=3na_n-2S_n+1437^{2016}+1$.

عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $\begin{cases} b_n\equiv 0[7] \\ n\equiv 0[5] \end{cases}$.

6) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $\left(1437^{9n+1}-3\times 4^{12n+1}+52\right)$ يقبل القسمة على 7.

<u>التمرين الثالث</u>: ($04,5$ نقطة)

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+5=0$.

ب) استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية: $\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2-4z+1-4i\left(1-\sqrt{3}\right)=0$.

2) θ عدد حقيقي حيث : $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ و z_0 عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له .

أ) اكتب العدد المركب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسي.

ب) عيّن θ علما أنّ: $\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\overline{z_0}}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$. ($\overline{z_0}$ هو مرافق العدد المركب z_0).

جـ) n عدد طبيعي. من أجل قيمة θ المتحصل عليها، اكتب العدد المركب $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي.

د) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

3) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=2-i$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$.

أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.

ب) استنتج أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

جـ) E النقطة من المستوي المركب ذات اللاحقة z_E حيث: $\begin{cases} \arg(z_E-z_A)-\arg(z_E-z_B)=\frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E-z_A}{z_E-z_B}\right|=2 \end{cases}$.

– بيّن أنّ : $z_E=\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i$.

– بيّن أنّ النقطة A هي صورة النقطة B بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميّزة.

4) M نقطة من المستوي المركب لاحقتها z ، النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

أ) عيّن z_I لاحقة النقطة I .

ب) α عدد حقيقي، نسمي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي المركب التي تُحقّق: $z-z_I=e^{i\alpha}$.

– تحقّق أنّ النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ).

– عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميّزة عندما يتغيّر α في $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع: (06,5 نقطة)

I) g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1+x^2+2\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]0,52\,;0,53[$ حلاً وحيدا α .

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+\dfrac{3+2\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$.

ب) شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

جـ) تحقّق أنّ : $f(\alpha)=2\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)$ ثم عيّن حصرا له.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ).

جـ) بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

4) نقبل أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث:

$0,22<x_0<0,23$ و $2,11<x_1<2,13$

أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f).

5) m وسيط حقيقي . ناقش بيانيا و حسب قيم m، عدد حلول المعادلة : $3+2\ln x-mx=0$.

III) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)+x\right]dx$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$.

2) أعط تفسيرا هندسيا للعدد u_0 .

3) احسب u_n بدلالة n.

4) نضع: $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$. احسب S_n بدلالة n.

انتهى الموضوع الأول

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأوّل: (04,5 نقطة)		
1.أ) $\overrightarrow{AB}(1;-2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-1;1)$ غير مرتبطين خطيا	$0,25$	
ب) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ و $x+3y+5z-4=0$ معادلة للمستوي (ABC).	$0,75$	
2.أ) $(P): x+3y+z-6=0$ و الشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n}_P$ غير مرتبطين خطيا.	$0,25\times 2$	
ب) $D\in(\Delta)$ و $\vec{u}$ شعاع توجيه له.	$0,50\times 2$	
جـ) $(\lambda\in\mathbb{R})$, $(\Delta)\begin{cases} x=-3\lambda+\frac{1}{2} \\ y=\lambda+2 \\ z=-\frac{1}{2}\end{cases}$.	$0,25$	$04,5$
د) $(H\in(\Delta))$ و $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$ و $d(A;(\Delta))=AH=\frac{\sqrt{14}}{4}$.	$0,75$	
3. أ) $G(-6;5;-1)$.	$0,25$	
ب) $(\Gamma): x^2+y^2+z^2+6x-6y-7=0$. $(\Gamma):(x+3)^2+(y-3)^2+z^2=25$. (Γ) سطح كرة مركزها $\Omega(-3;3;0)$ و نصف قطرها 5.	$0,25$ $0,25$	
جـ) $d(\Omega;(ABC))=\frac{2}{\sqrt{35}}$ و $\frac{2}{\sqrt{35}}<5$ ، (Γ) يقطع (ABC) وفق دائرة .	$0,25$	
التمرين الثاني: (04,5 نقطة)		
1. u_1 و u_2 حلا المعادلة $x^2-e^4(1+e^3)x+e^{11}=0$ ، $\Delta=\left[e^4(e^3-1)\right]^2$ $u_1<u_2$ منه $u_1=e^4$ و $u_2=e^7$ و $q=e^3$	$0,50$	
2.أ) $u_n=e^{3n+1}$.	$0,25$	
ب) $S_n=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$.	$0,50$	$02,75$
3. أ) $2S_n=a_n(3n-4)+14$. تبيان أن: $PGCD(a_n,14)=PGCD(2S_n,a_n)$.	$0,50$	
ب) القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n,a_n)$ هي 1 ، 2 ، 7 ، 14.	$0,25$	
جـ) $n=14k+4$ و $k\in\mathbb{N}$.	$0,75$	

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموع</th></tr>
<tr><td>.4
<table><tr><td rowspan="2">$k\in\mathbb{N}$</td><td>n</td><td>$3k$</td><td>$3k+1$</td><td>$3k+2$</td></tr><tr><td>الباقي</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr></table></td><td>0,50</td><td rowspan="3">01,75</td></tr>
<tr><td>.5 $n=35p$ حيث $p\in\mathbb{N}$</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>.6 $1437^{9n+1}-3\times4^{12n+1}+52\equiv0[7]$.</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td><u>التمرين الثالث:</u> (04,5 نقطة)</td><td></td><td rowspan="14">04,5</td></tr>
<tr><td>1.أ) $z_1=2+i$ و $z_2=2-i$.</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>ب) $z'=1+i\sqrt{3}$ و $z"=1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>2.أ) $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>ب) $\theta=\frac{\pi}{12}$.</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>جـ) $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n=\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>د) $n=24p$ و $p\in\mathbb{N}$.</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>3.أ) $z_D=1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>ب) الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>جـ) − $z_E=\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i$.
− التشابه المباشر مركزه E نسبته 2 و $\frac{\pi}{2}$ زاوية له .</td><td>0,50
0,25</td></tr>
<tr><td>4.أ) $z_I=2$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>ب) $\left|z_E-z_I\right|=1$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>(Γ) هي الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها 1.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td><u>التمرين الرابع:</u> (06,50 نقطة)</td><td></td><td rowspan="3">01</td></tr>
<tr><td>I) 1. $g'(x)=2x+\frac{2}{x}$ ، g متزايدة تماما على المجال.</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>2. المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق : $0,52<\alpha<0,53$.
$g(0,52)\approx-0,04$ و $g(0,53)\approx0,01$</td><td>0,50</td></tr>
</table>

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
.3 $\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & \alpha & +\infty \\ \hline g(x) & - & 0 & + \end{array}$	$0,25$	$05,50$
II) 1. $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.	$0,25\times 2$	
2. أ) $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$.	$0,50$	
ب) جدول تغيرات الدالة f .	$0,25$	
جـ) $f(\alpha)=2\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)$ و $2,71< f(\alpha)<2,81$.	$0,25\times 2$	
3. أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]=0$ ، (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta): y=-x$.	$0,25\times 2$	
ب) وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).	$0,25$	
جـ) $(T): y=-x+2\sqrt{e}$.	$0,50$	
4. إنشاء (T) و (Δ)و (C_f).	$0,50$	
5. المناقشة بيانيا: – إذا كان $m\leq 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا وحيدا. – إذا كان $0<m<2\sqrt{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلّين متمايزين. – إذا كان $m=2\sqrt{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلا مضاعفا. – إذا كان $m>2\sqrt{e}$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلولا.	$0,50$	
III) 1. الدالة $h: x\mapsto f(x)+x$ موجبة تماما على المجال $\left[e^n;e^{n+1}\right]$ من أجل كل عدد طبيعي n.	$0,25$	
2. u_0 يشير إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=e$.	$0,25$	
3. $u_n=2n+4$.	$0,50$	
4. $S_n=n^2+5n+4$.	$0,25$	